

流体力学 III 試験問題

1965-7-6

by E. Yamazato

- 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ (w -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。
- 複素ポテンシャルが $w = -i\ln z + 2z$ で与えられる流れについて：
 - (1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
 - (2) Potential function, Stream function を求めよ
 - (3) Stagnation point(or points) を求めよ
 - (4) $r = 1$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
- 半径 a の円柱のまわりを平行流が速度 U で左から右へ流れている。(1) x 軸および y 軸上の速度分布を $u/U, v/U$ で示せ。(2) x 軸上で $x=-a, x=-2a$ 点の圧力係数を求めよ。
- 吹き出しの強さ $m = Q/2\pi = 60\text{cm}^2/\text{s}$ の吹き出し点が $x = 2\text{cm}, y = 0$ 点にあり、それと同じ強度の吹き出し点が $x = -2\text{cm}, y = 0$ の点にあるとき、次の値を求めよ。(1) 岐点、(2) 流線と等ポテンシャル線を描け。(3) $x = 2\text{cm}, y = 3\text{cm}$ 点の合速度の大きさと方向を求めよ。(4) 無限遠点の圧力を 12kgf/cm^2 とすれば $x = 2\text{cm}, y = 3\text{cm}$ 点の圧力はいくらか。ただし流体の密度を $0.01\text{kg/s}^2/\text{cm}^4$ とする。

(解)

1.

$$w = U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$
$$\frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} = 0$$
$$\left. \frac{dw}{dz_1} \right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

At point A, $z = 2a, z_2 = a + \frac{a^2}{a} = a, z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$

$$\left. \frac{dw}{dz_1} \right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$
$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0$$
$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$U(\cos \alpha - i \sin \alpha - \cos \alpha - i \sin \alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha \quad (\Gamma : \text{negative})$$

2.

- (1) Circulation + parallel flow
- (2) $w = -i \ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i \ln r + \theta + 2r(\cos \theta + i \sin \theta)$
 $= (\theta + 2r \cos \theta) + i(2r \sin \theta - \ln r)$
 $\varphi = \theta + 2r \cos \theta, \quad \psi = 2r \sin \theta - \ln r$

$$(3) \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = 0$$

$$z = \frac{i}{2} = x + iy \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \text{At } r = 1, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3, \quad V = 3$$

3.

$$(1) \quad \frac{dw}{dz} = U\left(1 - \frac{a}{z^2}\right) = U\left(1 - \frac{a}{r^2 e^{2i\theta}}\right)$$

On the x -axis, $\theta = 0, \pi, e^{-2i\pi} = 1$

$$U\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) = u - iv, \quad v = 0, \quad \frac{u}{U} = \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$r = y, \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad e^{-2i\theta} = -1$$

$$v = 0, \quad \frac{u}{U} = \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right), \quad \frac{v_\theta}{U} = 2\sin\theta$$

$$(2) \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho U^2} = 1 - \left(\frac{V}{U}\right)^2$$

On the x -axis: $V = u = U\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$

$$C_p = \left\{1 - \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^2\right\}$$

$$x = -a: C_p = \left\{1 - \left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right)^2\right\} = 1$$

$$x = -2a: C_p = \left\{1 - \left(1 - \frac{a^2}{4a^2}\right)^2\right\} = \frac{7}{16}$$

4.

$$(1) \quad \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} = 0, \quad \frac{m}{x-2} + \frac{m}{x+2} = 0, \quad x = 0$$

$$(3) \quad v_{r1} = \frac{m}{\{(x-2)^2 + y^2\}^{1/2}}, \quad v_{r2} = \frac{m}{\{(x+2)^2 + y^2\}^{1/2}}$$

At point(2, 3),

$$v_{r1} = \frac{60}{3} = 20\text{cm/s}, \quad v_{r2} = \frac{60}{5} = 12\text{cm/s}$$

$$V^2 = v_{r1}^2 + v_{r2}^2 - 2v_{r1}v_{r2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$V^2 = 20^2 + 12^2 + 2 \times 20 \times 12 \times \frac{3}{5}, \quad V = 28.8\text{cm/s}$$

$$p_\infty = 12\text{kgf/cm}^2, \quad \rho = 0.01\text{kg/s}^2/\text{cm}^4, \quad p_\infty = p + \frac{\rho}{2}V^2$$

$$\text{At point(2, 3),} \quad p = 12 - \frac{0.01}{2} \times 28.8^2 = 7.84\text{kgf/cm}^2$$