

# 理想流体力学試験問題

7-21-2000, 18:00~19:30

by E. Yamazato

1. (20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1) w = -15i \ln z + 13z, (2) w = 23z + 22 \ln z, (3) w = z^n \left(n = \frac{2}{3}\right)$$

2. (20) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が  $u = x + y$ ,  $v = x^2 - y$  なる流れは理論上存在しうるか。(2) その流れの流線を求めよ。(3) 直線  $x = \pm 5, y = \pm 6$  で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ。

3. (20) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、 $u = c_1x + c_2y, v = c_3x + c_4y$  で与えられるとき、(1) 定数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  の関係、(2) 流れの関数を求めよ。

4. (25)  $4a$  の長さの平板に  $\alpha$  なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ ( $w$ -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。

5. (20) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

# 理想流体力学試験問題

by E. Yamazato

7-21-2000, 18:00~19:30

1. (20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1) w = -15i \ln z + 13z, (2) w = 23z + 22 \ln z, (3) w = z^n \left(n = \frac{2}{3}\right)$$

(解)

(1) Parallel flow( $U=13$ )+Circulation flow( $\Gamma = 30\pi$ )

$$w = -15i \ln(re^{i\theta}) + 13re^{i\theta} = -15i \ln r + 15\theta + 13r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\varphi = 15\theta + 13r \cos \theta, \quad \psi = 13r \sin \theta - 15 \ln r$$

(2) Parallel flow( $U=23$ )+source flow( $Q = 44\pi$ )

$$w = 23re^{i\theta} + 22 \ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 23r \cos \theta + 22 \ln r, \quad \psi = 23r \sin \theta + 22\theta$$

(3) Corner flow with  $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$$

$$\text{For } n = \frac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3} \cos \frac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3} \sin \frac{2\theta}{3}$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = u - iv$$

$$u = a \cos \alpha, \quad v = -a \sin \alpha, \quad V = a$$

2. (20) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が  $u = x + y$ ,  $v = x^2 - y$  なる流れは理論上存在しうるか. (2) その流れの流線を求めよ. (3) 直線  $x = \pm 5, y = \pm 6$  で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ.

(解)

$$(1) \operatorname{div} V = 0$$

$$(2) u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x + y; \psi = xy + 1/2y^2 + f(x)$$

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -x^2 + y; \psi = -1/3x^3 + xy + f(y)$$

$$\psi = -1/3x^3 + 1/2y^2 + xy + c_3; 1/3x^3 - 1/2y^2 - xy = c$$

$$(3) \Gamma = \int_{-5}^5 \int_{-6}^6 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{-5}^5 \int_{-6}^6 (2x - 1) dx dy = -120$$

3. (20) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、 $u = c_1x + c_2y, v = c_3x + c_4y$  で与えられるとき、(1) 定数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  の関係、(2) 流れの関数を求めよ。

(解)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad c_1 + c_4 = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_1x + c_2y, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = c_3x + c_4y$$

$$\psi = c_1xy + \frac{c_2}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c_3}{2}x^2 - c_4xy + f(y) = c_1xy - \frac{c_3}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = c_1xy + \frac{1}{2}(c_2y^2 - c_3x^2) + const.$$

$$\text{For irrotational flow, } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad c_2 = c_3, \quad \psi = c_1xy + \frac{c_2}{2}(y^2 - x^2) + const.$$

4.(20) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

(解)

$$w = Uz + m \ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$

$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

5.(25)  $4a$  の長さの平板に  $\alpha$  なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ ( $w$ -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。

(解)

$$w = U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1} = U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$\text{At point } A, \quad z = 2a, \quad z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos \alpha - i \sin \alpha - \cos \alpha - i \sin \alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha \quad (\Gamma : \text{negative})$$