

完全流体力学演習問題

2-1. 二次元流れにおける吹出しで $r = r_o$ の速度を V_o として x 軸上の圧力係数を求めよ.

(解)

$$v_r = \frac{m}{r}, \quad v_\theta = 0$$

$$\left(\frac{V}{V_o}\right) = \left(\frac{r_o}{r}\right), \quad c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_o}\right)^2 = 1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2$$

2-2. 吹出し流量が Q で吹出し点が原点にあり, さらに x 軸に平行な速度 U の流れがこれに加わった場合, この組み合わせられた流れの岐点を通る流線は $\psi = Q/2$ であることを証明せよ.

(解)

$$\varphi = Ur \cos \theta + m \ln r, \quad \psi = Ur \sin \theta + m\theta$$

At stagnation points, $U - \frac{m}{r} = 0, \quad r_s = \frac{m}{U}$

$$\psi = U \frac{m}{U} \sin \pi + m\pi = \frac{Q}{2}, \quad \psi = Ur \sin \theta + m\theta = \frac{Q}{2}$$

2-3. 図に示す二次元ディフューザ内を流量 $20\text{cm}^3/\text{s}$ の空気が流れている. いま空気の密度を $1.204\text{kg}/\text{m}^3$ として次の値を求めよ. (1) もし流れがポテンシャル流れとすればどのような型の流れか. (2) ポテンシャル流れとして A 点における速度を求めよ. (3) A 点における圧力勾配を求めよ. (3) 一次元の流れと仮定したときの A 点の速度を求めよ.

(解)

$$(1) \varphi = \ln r, \quad v_r = \frac{m'}{r}, \quad m' = \frac{Q'}{2\pi}$$

$$Q = \frac{60}{360} Q' = \frac{16}{Q'}, \quad Q' = 6Q = 6 \times 20 = 120\text{cm}^3/\text{s}, \quad m' = 19\text{cm}^3/\text{s}$$

$$(2) v_{rA} = \frac{m'}{r_A} = \frac{Q'}{2\pi r_A} = \frac{120}{(2\pi \times 20)} = 0.55\text{cm}/\text{s}$$

$$(3) v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho v_r \left(\frac{dv_r}{dr}\right)_A = \frac{\rho m'^2}{r_A^3}$$

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_A = \frac{(1.204 \times 10^{-6} \times 19.1^2)}{34.6^3} = 0.01 \times 10^{-6}$$

$$(4) v_{rA} = \frac{Q}{A} = \frac{20}{40} = 0.5\text{cm}/\text{s}$$

2-4. 強さ m の吹き出しが $(-a, 0)$ に, 同じ強さの吸い込みが $(a, 0)$ にあるときの流線の式を求めよ.

(解)

$$\varphi = m \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad \psi = m(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right), \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{y}{x+a}\right) - \left(\frac{y}{x-a}\right)}{1 + \frac{y^2}{(x^2-a^2)}}\right\}$$

$$\frac{\psi}{m} = \tan^{-1}\frac{-2ya}{(x^2+y^2-a^2)}$$

$$\tan\left(\frac{\psi}{m}\right) = \frac{-2ya}{(x^2+y^2-a^2)}, \quad x^2+y^2-a^2+2ay\cot\left(\frac{\psi}{m}\right) = 0$$

$$x^2 + \left\{y^2 + 2ay\cot\left(\frac{\psi}{m}\right) + a^2\cot^2\left(\frac{\psi}{m}\right) - a^2\{1 + \cot^2\left(\frac{\psi}{m}\right)\}\right\} = 0$$

$$x^2 + \{y + a\cot\left(\frac{\psi}{m}\right)\}^2 = \{a\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\psi}{m}\right)\}^2$$

$$\text{circles of radius: } a\operatorname{cosec}\left(\frac{\psi}{m}\right), \quad \text{centers: } \{0, a\cot\left(\frac{\psi}{m}\right)\}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= -m \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left\{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left\{\frac{1 + \frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)}}{1 - \frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)}}\right\} = -\tanh^{-1}\left\{\frac{2ax}{(x^2+y^2-a^2)}\right\} \end{aligned}$$

$$\frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)} = \tanh\left(\frac{\varphi}{m}\right)$$

$$\{x - a\coth\left(\frac{\varphi}{m}\right)\}^2 + y^2 = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varphi}{m}\right)$$

$$\text{circles of radius: } a\operatorname{cosec}\left(\frac{\varphi}{m}\right), \quad \text{centers: } \{a\cot\left(\frac{\varphi}{m}\right), 0\}$$

2-5. 吹き出しの強さ $m = Q/2\pi = 60\text{cm}^2/\text{s}$ の吹き出し点が $x = 2\text{cm}$, $y = 0$ 点にあり, それと同じ強度の吹き出し点が $x = -2\text{cm}$, $y = 0$ の点にあるとき, 次の値を求めよ. (1) 岐点, (2) 流線と等ポテンシャル線を描け. (3) $x = 2\text{cm}$, $y = 3\text{cm}$ 点の合速度の大きさと方向を求めよ. (4) 無限遠点の圧力を 12kgf/cm^2 とすれば $x = 2\text{cm}$, $y = 3\text{cm}$ 点の圧力はいくらか. ただし流体の密度を $0.01\text{kg/s}^2/\text{cm}^4$ とする.

(解)

$$(1) \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} = 0, \quad \frac{m}{x-2} + \frac{m}{x+2} = 0, \quad x = 0$$

$$(3) v_{r1} = \frac{m}{\{(x-2)^2+y^2\}^{1/2}}, \quad v_{r2} = \frac{m}{\{(x+2)^2+y^2\}^{1/2}}$$

At point(2, 3),

$$v_{r1} = \frac{60}{3} = 20\text{cm/s}, \quad v_{r2} = \frac{60}{5} = 12\text{cm/s}$$

$$V^2 = v_{r1}^2 + v_{r2}^2 - 2v_{r1}v_{r2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$V^2 = 20^2 + 12^2 + 2 \times 20 \times 12 \times \frac{3}{5}, \quad V = 28.8\text{cm/s}$$

$$p_\infty = 12\text{kgf/cm}^2, \quad \rho = 0.01\text{kg/s}^2/\text{cm}^4, \quad p_\infty = p + \frac{\rho}{2}V^2$$

$$\text{At point(2, 3), } p = 12 - \frac{0.01}{2} \times 28.8^2 = 7.84\text{kgf/cm}^2$$

2-6. (1) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u = 4y$, $v = 2x$ なる流れは理論上存在するか. (2) その流れの流線を求めよ. (3) 直線 $y = 1$, $y = 3$, $x = 2$, $x = 5$ で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ.

(解)

$$(1) \operatorname{div} V = 0$$

$$(2) \frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x}, \quad 2x dx - 4y dy = 0, \quad x^2 - 2y^2 = c$$

$$(3) 4(5-2) + 10(3-1) - 12(5-1) - 4(1-3) = 12m^2/s$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_2^5 \int_1^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int_1^3 6 dy = -(18-6) = -12m^2/s \end{aligned}$$

2-7. 速度成分が $u = x + y$, $v = x^2 + y$ で表される流れにおいて $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x-1) dx dy = -2 \int_{-1}^1 dy = -4m^2/s \end{aligned}$$

1-17. 二次元の渦流れで、その速度成分が $v_r = 0$, $v_\theta = \omega$ なるときの渦度を求めよ.

(解)

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = f(r)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, \quad \psi = -\frac{1}{2} \omega r^2 + f(\theta)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega r^2 = -\frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2)$$

$$\zeta = -\nabla^2 \psi = -(-\omega - \omega) = 2\omega$$