理想流体力学試験問題(2)

1999-9-17, 18:00-19:30

by E. Yamazato

1.(20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．また、(1) の速度成分、u,v および合速度 V を求めよ。

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{2}{3})$$

2.(20)$z = \pm a$ にお互いに反対向きで強さの等しい Γ の渦がある場合について (1) 原点 (0,0) に於ける速度を求めよ。(2) また二つの渦による誘起速度およびその向きを求めよ。3.(20) 図 1 に示すように無限に広い壁 (x=0) に近接して点 p(x,0) に強さ Γ の渦がある。その渦による誘起速度とその向きを求めよ。4.(20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．5.(25) $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

（解）

1.

(1) Parallel flow with $\theta = \alpha$

$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha)\}$

$\varphi = ar\cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar\sin(\theta + \alpha)$

(2) Corner flow with $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$

$For\ n = \dfrac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3}\cos\dfrac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

$\dfrac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u - iv$

$u = a\cos\alpha, \quad v = -a\sin\alpha, \quad V = a$

2.

$w = \dfrac{i\Gamma}{2\pi}ln(z-a) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi}ln(z+a)$

$\dfrac{dw}{dz} = u - iv = \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\dfrac{1}{(z-a)} - \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\dfrac{1}{(z+a)} = \dfrac{i\Gamma}{2\pi} = \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\dfrac{2a^2}{z^2 - a^2}$

At the origin(0,0)$u = 0, \quad v = -\dfrac{\Gamma}{\pi a}$

$V = \dfrac{\Gamma}{2\pi(2a)} = \dfrac{\Gamma}{4\pi a}$

3. $V = \frac{\Gamma}{4\pi x}$ で壁に平行に移動する。説明省略。

4.

$$w = Uz + m\ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$
$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$
$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$
$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

5.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$
$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$
$$\frac{dw}{dz_1}) = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$
$$At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$
$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$
$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$\Gamma = -4\pi a U\sin\alpha\ (\Gamma:\ negative)$$