理想流体力学試験問題(1)

6-24-1999, 12:50～14:20

by E. Yamazato

1. (25) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1)\ w = -5i\ln z + 3z,\ (2)\ w = 3z + 2\ln z$$

2.(25) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか.(2) その流れの流線を求めよ.(3) 直線 $x = \pm 1, y = \pm 1$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ.3.(25) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、

$u = ax + by, v = cx + dy$ で与えられるとき、(1) 定数 a, b, c, d の関係、(2) 速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。4. (25) $4a$ の長さの平板に直角な流れがある.(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ.(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ.

（解）

1.

(1) Parallel flow(U=3)+Circulation flow($\Gamma = 10\pi$)

$$w = -5i\ln(re^{i\theta}) + 3re^{i\theta} = -5i\ln r + 5\theta + 3r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\varphi = 5\theta + 3r\cos\theta, \quad \psi = 3r\sin\theta - 5\ln r$$

(2) Parallel flow(U=3)+source flow($Q = 4\pi$)

$$w = 3re^{i\theta} + 2\ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 3r\cos\theta + 2\ln r, \quad \psi = 3r\sin\theta + 2\theta$$

2.

(1) $divV = 0$

(2) $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = x + y; \psi = xy + 1/2y^2 + f(x)$

$$-v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -x^2 + y; \psi = -1/3x^3 + xy + f(y)$$

$$\psi = -1/3x^3 + 1/2y^2 + xy + c; 1/3x^3 - 1/2y^2 - xy = c$$

(3) $\Gamma = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x - 1)dxdy = -4$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const.$$

For irrotational flow, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x},\ b = c,\ \psi = axy + \dfrac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ax + by; \phi = 1/2ax^2 + bxy + f(y)$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = cx + dy; \phi = 1/2dy^2 + cxy + f(x)$$
$$\phi = 1/2a(x^2 - y^2) + bxy + c$$

4.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}), z_2 = z_1^{-i1/2\pi}, z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}, z_1 = iz_2$$
$$w = U(iz_2 + \frac{a^2}{z^2} = iU(z_2 - \frac{a^2}{z_2})$$
$$w^2 = -U^2(z_2 - \frac{a^2}{z^2})^2, U^2z^2 = U^2(z_2 + \frac{a^2}{z^2})^2$$
$$w^2 + U^2z^2 = U^2 4a^2, w = U\sqrt{4a^2 - z^2} = iU\sqrt{z^2 - 4a^2}$$