理想流体力学試験問題

1997-9-18, 12:50～14:20

by E. Yamazato

1.(20) 複素ポテンシャルが $w = az^{\pi/\alpha}$ で表されるとき (1)$\alpha = \pi/4$, (2)$\alpha = \pi/2$ について速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。2.(20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1)\ w = -3i\ln z + 2z,\ (2)\ w = 5z + \ln z$$

3.(20) 複素ポテンシャルが次のように表される流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$w = 5ze^{i\pi/3}$$

4.(20) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = x + y, v = x^2 - y$ なる流れは (1) 理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $x = \pm 1, y = \pm 1$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ．5.(20) 二次元流れの速度成分が $u = x - 4y, v = -4x - y$ で与えられる流れは理論上存在し得るか。流れの関数を求めよ。もしその流れが渦無し流れであればその速度ポテンシャルを求めよ。6.(20)$z = \pm a$ にお互いに反対向きで強さの等しい Γ の渦がある場合について (1) 原点 (0,0) に於ける速度を求めよ。(2) また二つの渦による誘起速度およびその向きを求めよ。7.(20) 図 1 に示すように無限に広い壁 (x=0) に近接して点 p(x,0) に強さ Γ の渦がある。その渦による誘起速度とその向きを求めよ。8.(20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．9.(20) 二次元の渦流れで，その速度成分が $v_r = 0,\ v_\theta = \omega r$ なるときの渦度を求めよ．10.(20) 図 2 に示すような流線図より, この流れはどういう型の流れを組み合わせたものかを説明せよ. また数値も含めた複素ポテンシャルを求めよ.

（解）

1.

$$\begin{aligned}
(1)\quad & w = az^4, w = a(x+iy)^4 = a(x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4)\\
& \phi = a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4), \psi = a(4x^3y - 4xy^3)\\
(2)\quad & w = az^2, w = a(x+iy)^2 = a(x^2 - y^2 + 2ixy)\\
& \phi = a(x^2 - y^2), \psi = 2axy
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \text{Parallel flow(U=2)+Circulation flow}(\Gamma = 6\pi)\\
& w = -3i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -3i\ln r + 3\theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta)\\
& \varphi = 3\theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - 3\ln r\\
(2)\quad & \text{Parallel flow(U=5)+source flow}(Q = 2\pi)\\
& w = 5re^{i\theta} + \ln(re^{i\theta}) = 5r(cos\theta + isin\theta) + lnr + i\theta\\
& \varphi = 5r\cos\theta + \ln r, \quad \psi = 5r\sin\theta + \theta
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& w = 5(x+iy)exp(i\alpha) = 5(x+iy)(cos\alpha + isin\alpha)\\
& \phi = 5(xcos\alpha - ysin\alpha), \quad \psi = 5(ycos\alpha - xsin\alpha), \quad \alpha = \pi/3
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad divV = 1 - 1 = 0 \\
&(2) \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x + y, \quad \psi = xy + \frac{1}{2}y^2 + f(x) \\
&\qquad\quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = x^2 - y, \quad \psi = -\frac{1}{3}x^3 + xy + f(y) \\
&\qquad\quad \psi = xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = c \\
&(3) \qquad \Gamma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x-1)dxdy = -2|y|_{-1}^{1} = -4m^2/s
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&divV = 0, \quad \psi = xy - 2y^2 + 2x^2 \\
&\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -4 - (-4) = 0 \\
&\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 4xy
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
&w = \frac{i\Gamma}{2\pi}ln(z-a) - \frac{i\Gamma}{2\pi}ln(z+a) \\
&\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-a)} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+a)} = \frac{i\Gamma}{2\pi} = \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{2a^2}{z^2-a^2} \\
&\text{At the origin(0,0)}u = 0, \quad v = -\frac{\Gamma}{\pi a} \\
&V = \frac{\Gamma}{2\pi(2a)} = \frac{\Gamma}{4\pi a}
\end{aligned}$$

7. $V = \frac{\Gamma}{4\pi x}$ で壁に平行に移動する。

8.

$$\begin{aligned}
&w = Uz + m\ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi} \\
&\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z} \\
&(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z} \\
&F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2dz = \frac{i\rho}{2}2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ \\
&F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
&v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = f(r) \\
&v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, \quad \psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 + f(\theta) \\
&\psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 = -\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2) \\
&\zeta = -\nabla^2\psi = -(-2\omega) = 2\omega
\end{aligned}$$

10.

Parallel flow+Source+Sink flow, $\quad dw = iUz + mln(z+a_2) - mln(z-a_1)$

$$w = 4iz + \frac{27 \times 4}{2\pi}[ln(z + 3 + 4i) - lnz]$$
$$w = 4iz + \frac{54}{\pi}ln[1 - \frac{(3 + 4i)}{z}]$$