理想流体力学試験問題

2003-8-7, 12:50 ∼ 14:20

by E. Yamazato

1.(25) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1)w = aze^{i\alpha}(\alpha > 0), \quad (2)w = -5ilnz + 3z, (3)3z + 2lnz$$

2.(20) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u = x + y, v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか。（２）その流れの流線を求めよ。(3) 直線 $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ。

3.(20) 速度成分が $u = a_1x + a_2y, v = b_1x + b_2y$ で与えられるときい流れが非圧縮性流体となるための（１）定数 a_1, a_2, b_1, b_2 の関係を示せ。（２）流れが渦なし流れとし 場合の流れの関数を求めよ。

4.(20) z $= \pm a$ にお互いに反対向きで強さの等しい Γ の渦がある場合について（１）原点（０，０）における速度およびその向きをを求めよ。(2) また二つの渦による誘起速度およびその向きを求めよ。

5.(20) 速度 U の一様流れの中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

（解）

1.

$$\begin{aligned}
&(1)\text{Parallel flow with } \theta = \alpha\\
&w = ar(cos(\theta + \alpha) + isin(\theta + \alpha)\\
&\phi = arcos(\theta + \alpha), \quad \psi = arsin(\theta + \alpha)\\
&\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(cos\alpha + isin\alpha) = u - iv\\
&u = acos\alpha, v = -asin\alpha, \quad V = a\\
&(2)\text{Parallel flow(U=3)+Circulation flow}(\Gamma = 10\pi)\\
&w = -5iln(re^{i\theta} + 3re^{i\theta} = -5ilnr + 5\theta + 3r(cos\theta + isin\theta)\\
&\phi = 5\theta + 3rcon\theta, \quad \psi = 3rsin\theta - 5lnr\\
&(=3)\text{Parallel flow(U=3)+Source flow}(Q = 4\pi)\\
&w = 3re^{i\theta} + 2ln(re^{i\theta}\\
&\phi = 3rcos\theta + 2lnr, \quad \psi = 3rsin\theta + 2\theta
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&(1)divV = 0\\
&(2)u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = x + y; \quad \psi = xy + 1/2y^2 + f(x)\\
&-v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -x^2 + y; \quad \psi = -1/3x^3 + xy + f(y)\\
&\psi = -1/3x^3 + 1/2y^2 + xy + c; 1/3x^3 - 1/2y^2 - xy = c\\
&\Gamma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\frac{\partial v}{\partial x} - (\frac{\partial u}{\partial y})dxdy == \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x - 1)dxdy = -4
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,, \quad a_1 + b_2 = 0\\
&u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = a_1x + a_2y, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = b_1x + b_2y\\
&\psi = a_1xy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{b_1}{2}x^2 - b_2xy + f(y) = a_1xy - \frac{b_1}{2}x^2 + f(y)\\
&\psi = a_1xy + \frac{1}{2}(a_2y^2 - b_1x^2) + const.
\end{aligned}$$

4.

$$w = \frac{i\Gamma}{2\pi} ln(z-a) - \frac{i\Gamma}{2\pi} ln(z+a)$$
$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-a)} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+a)} = \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{2a^2}{(z^2-a^2)}$$
$$\text{At the origin(0,0)} u = 0, \quad v = -\frac{\Gamma}{\pi a}$$
$$V = \frac{\Gamma}{2\pi(2a)}$$

5.

$$w = Uz + mlnz, m = \frac{Q}{2\pi}$$
$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$
$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$
$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$