

理想流体力学試験問題

2002-8-1,12:50~14:20

by E. Yamazato

1.(20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1)w = -15ilnz + 13z, (2)w = 23z + 22lnz$$

2.(20) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u = 3x + y, v = 2x - 3y$ なる流れの渦度を求めよ。(2) その流れの流れ関数を求めよ。(3) 直線 $x = \pm 2, y = \pm 2$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ。

3.(20) $x=a$ と $x=-a$ に強さ Q の吹き出しがあるとき、その複素ポテンシャルを求めよ。また $(0,a)$ 点における速度成分 u,v を求めよ。

4.(20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

5.(25) $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 平行流れ (w - 平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(2) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。

(解)

1.

(1) Parallel flow ($U=3$)+Circulation flow($\Gamma = 30\pi$)

$$w = -15iln(re^{i\theta}) + 13re^{i\theta} = -15ilnr + 15\theta + 13r(\cos\theta + isin\theta)$$

$$\varphi = 15\theta + 13r\cos\theta, \psi = 13rsin\theta - 15lnr$$

(2) Parallel flow($U=23$)Source flow($Q = 44\pi$)

$$w = 23re^{i\theta} + 22lnre^{i\theta}$$

$$\varphi = 23r\cos\theta + 22lnr, \psi = 23rsin\theta + 22\theta$$

2.

$$(1) \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 - 1 = 1$$

$$(2) \quad u = 3x + y, v = 2x - 3y$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3xy + y; \psi = 3xy + 1/2y^2$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x - 3y; \psi = x^2 + 3xy$$

$$\psi = 3xy + 1/2y^2 - x^2$$

$$(3) \quad \Gamma = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 4 \times 4 = 16$$

3.

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-a) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z+a) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - a^2)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{2z}{z^2 - a^2} = u - iv$$

$$\text{At}(0, a), z = ia, u - iv = \frac{Q}{2\pi} \frac{2ia}{-a^2 - a^2} = -\frac{Qi}{2\pi a}$$

$$\therefore u = 0, v = \frac{Q}{2\pi a}$$

4.

$$\begin{aligned}
 w &= Uz + m \ln z, m = \frac{Q}{2\pi} \\
 \frac{dw}{dz} &= U + \frac{m}{z} \\
 \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 &= U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z} \\
 F_x - F_y &= \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) = -\rho UQ \\
 F_x &= -\rho UQ, F_y = 0
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 w &= U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, z_2 = z_1 e^{i\alpha}, z = z_2 + \frac{a^2}{z_2} \\
 \frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} &= 0 \\
 \frac{dw}{dz_1} &= U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1}\right) = 0 \\
 \text{At point A, } z &= 2a, z_2 = a, z_1 = z_2 e^{i\alpha} \\
 \left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A &= U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0 \\
 U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} &= 0 \\
 U(e^{-i\alpha}) - e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} &= 0 \\
 U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} &= 0 \\
 \Gamma &= -4\pi a U \sin\alpha (\Gamma : \text{negative})
 \end{aligned}$$