理想流体力学試験問題

2000-7-21, 18:00〜19:30

by E. Yamazato

1. (20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1)\ w=-15i\ln z+13z,\ (2)\ w=23z+22\ln z,\ (3)\ w=z^n\ (n=\frac{2}{3})$$

2. (20) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u=x+y,\ v=x^2-y$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $x=\pm5, y=\pm6$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ.

3. (20) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、$u=c_1x+c_2y, v=c_3x+c_4y$ で与えられるとき、(1) 定数 c_1,c_2,c_3,c_4 の関係、(2) 流れの関数を求めよ。

4. (25) $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ.

5. (20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ.

（解）

1.

(1) Parallel flow(U=13)+Circulation flow($\Gamma=30\pi$)

$$w=-15i\ln(re^{i\theta})+13re^{i\theta}=-15i\ln r+15\theta+13r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\varphi=15\theta+13r\cos\theta,\quad \psi=13r\sin\theta-15\ln r$$

(2) Parallel flow(U=23)+source flow($Q=44\pi$)

$$w=23re^{i\theta}+22\ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi=23r\cos\theta+22\ln r,\quad \psi=23r\sin\theta+22\theta$$

(3) Corner flow with $\theta=\frac{3}{2}\pi$

$$z=re^{i\theta},\quad w=\varphi+i\psi=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\varphi=r^n\cos n\theta,\quad \psi=r^n\sin n\theta$$

$$For\ n=\frac{2}{3},\quad \varphi=r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3},\quad \psi=r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3}$$

$$\frac{dw}{dz}=ae^{i\alpha}=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)=u-iv$$

$$u=a\cos\alpha,\quad v=-a\sin\alpha,\quad V=a$$

2.

(1) $divV=0$

(2)

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=x+y;\psi=xy+1/2y^2+f(x)$$

$$-v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=-x^2+y;\psi=-1/3x^3+xy+f(y)$$

$$\psi=-1/3x^3+1/2y^2+xy+c_3;1/3x^3-1/2y^2-xy=c$$

(3) $$\Gamma = \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(2x-1)dxdy = -120$$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad c_1 + c_4 = 0$$
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_1 x + c_2 y, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = c_3 x + c_4 y$$
$$\psi = c_1 xy + \frac{c_2}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c_3}{2}x^2 - c_4 xy + f(y) = c_1 xy - \frac{c_3}{2}x^2 + f(y)$$
$$\psi = c_1 xy + \frac{1}{2}(c_2 y^2 - c_3 x^2) + const.$$

For irrotational flow, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, $c_2 = c_3$, $\psi = c_1 xy + \frac{c_2}{2}(y^2 - x^2) + const.$

4.

$$w = Uz + m\ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$
$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$
$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$
$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

5.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$
$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$
$$\frac{dw}{dz_1} = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$
$$At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$
$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$
$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$\Gamma = -4\pi aU\sin\alpha\ (\Gamma:\ negative)$$