理想流体力学演習問題 (2)

2-1. 二次元流れにおける吹出しで $r = r_o$ の速度を V_o として x 軸上の圧力係数を求めよ．

2-2. 吹出し流量が Q で吹出し点が原点にあり，さらに x 軸に平行な速度 U の流れがこれに加わった場合，この組み合わされた流れの岐点を通る流線は $\psi = Q/2$ であることを証明せよ．

2-3. 図に示す二次元ディフューザ内を流量 $20cm^3/s$ の空気が流れている．いま空気の密度を $1.204kg/m^3$ として次の値を求めよ．(1) もし流れがポテンシャル流れとすればどういう型の流れか．(2) ポテンシャル流れとして A 点における速度を求めよ．(3) A 点における圧力勾配を求めよ．(3) 一次元の流れと仮定したときの A 点の速度を求めよ．

2-4. 強さ m の吹き出しが $(-a,\ 0)$ に，同じ強さの吸い込みが $(a,\ 0)$ にあるときの流線の式を求めよ．

2-5. 吹き出しの強さ $m = Q/2\pi = 60cm^2/s$ の吹き出し点が $x = 2cm,\ y = 0$ 点にあり，それと同じ強度の吹き出し点が $x = -2cm,\ y = 0$ の点にあるとき，次の値を求めよ．(1) 岐点，(2) 流線と等ポテンシャル線を描け．(3) $x = 2cm,\ y = 3cm$ 点の合速度の大きさと方向を求めよ．(4) 無限遠点の圧力を $12kgfcm^2$ とすれば $x = 2cm,\ y = 3cm$ 点の圧力はいくらか．ただし流体の密度を $0.01kgs^2/cm^4$ とする．

2-6. (1) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = 4y,\ v = 2x$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $y = 1,\ y = 3,\ x = 2,\ x = 5$ で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ．

2-7. 速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 + y$ で表される流れにおいて $x = \pm 1,\ y = \pm 1$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ．

2-1. 二次元流れにおける吹出しで $r = r_o$ の速度を V_o として x 軸上の圧力係数を求めよ．

（解）

$$v_r = \frac{m}{r}, \quad v_\theta = 0$$
$$(\frac{V}{V_o}) = (\frac{r_o}{r}), \quad c_p = 1 - (\frac{V}{V_o})^2 = 1 - (\frac{r_o}{r})^2$$

2-2. 吹出し流量が Q で吹出し点が原点にあり，さらに x 軸に平行な速度 U の流れがこれに加わった場合，この組み合わされた流れの岐点を通る流線は $\psi = Q/2$ であることを証明せよ．

（解）

$$\varphi = Ur\cos\theta + m\ln r, \quad \psi = Ur\sin\theta + m\theta$$
$$\text{At stagnation points,} \quad U - \frac{m}{U} = 0, \quad r_s = \frac{m}{U}$$
$$\psi = U\frac{m}{U}\sin\pi + m\pi = \frac{Q}{2}, \quad \psi = Ur\sin\theta + m\theta = \frac{Q}{2}$$

2-3. 図に示す二次元ディフューザ内を流量 $20cm^3/s$ の空気が流れている．いま空気の密度を $1.204kg/m^3$ として次の値を求めよ．(1) もし流れがポテンシャル流れとすればどういう型の流れか．(2) ポテンシャル流れとして A 点における速度を求めよ．(3) A 点における圧力勾配を求めよ．(3) 一次元の流れと仮定したときの A 点の速度を求めよ．

（解）

$$(1)\ \varphi = \ln r, \quad v_r = \frac{m'}{r}, \quad m' = \frac{Q'}{2\pi}$$
$$Q = \frac{60}{360}Q' = \frac{1}{6}Q', \quad Q' = 6Q = 6\times 20 = 120cm^3/s, \quad m' = 19cm^3/s$$
$$(2)\ v_{rA} = \frac{m'}{r_A} = \frac{Q'}{2\pi r_A} = \frac{120}{(2\pi\times 20)} = 0.55cm/s$$
$$(3)\ v_r\frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho v_r\left(\frac{dv_r}{dr}\right)_A = \frac{\rho m'^2}{r_A^3}$$
$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_A = \frac{(1.204\times 10^{-6}\times 19.1^2)}{34.6^3} = 0.01\times 10^{-6}$$
$$(4)\ v_{rA} = \frac{Q}{A} = \frac{20}{40} = 0.5cm/s$$

2-4. 強さ m の吹き出しが $(-a,\ 0)$ に，同じ強さの吸い込みが $(a,\ 0)$ にあるときの流線の式を求めよ．

（解）

$$\varphi = m\ln(\frac{r_2}{r_1}), \quad \psi = m(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(\frac{y}{x-a}), \quad \theta_2 = \tan^{-1}(\frac{y}{x+a})$$

$$\tan^{-1}(\frac{y}{x+a}) - \tan^{-1}(\frac{y}{x-a}) = \tan^{-1}\left\{\frac{(\frac{y}{x+a}) - (\frac{y}{x-a})}{1 + \frac{y^2}{(x^2-a^2)}}\right\}$$

$$\frac{\psi}{m} = tan^{-1}\frac{-2ya}{(x^2+y^2-a^2)}$$

$$tan(\frac{\psi}{m}) = \frac{-2ya}{(x^2+y^2-a^2)}, \quad x^2+y^2-a^2+2ay\cot(\frac{\psi}{m}) = 0$$

$$x^2 + \left\{y^2 + 2ay\cot(\frac{\psi}{m}) + a^2\cot^2(\frac{\psi}{m}\} - a^2\{1+\cot^2(\frac{\psi}{m})\right\} = 0$$

$$x^2 + \{y + a\cot(\frac{\psi}{m})\}^2 = \{acosec^2(\frac{\psi}{m})\}^2$$

$$\text{circles of radius: acosec}(\frac{\psi}{m}), \quad \text{centers}: \ \{0,\ a\cot(\frac{\psi}{m})\}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= -m\ln(\frac{r_1}{r_2}) = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1+\frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)}}{1-\frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)}}\right\} = -\tanh^{-1}\left\{\frac{2ax}{(x^2+y^2-a^2)}\right\} \end{aligned}$$

$$\frac{2ax}{(x^2+y^2+a^2)} = \tanh(\frac{\varphi}{m})$$

$$\{x - a\coth(\frac{\varphi}{m})\}^2 + y^2 = sech^2(\frac{\varphi}{m})$$

$$\text{circles of radius: acosec}(\frac{\varphi}{m}), \quad \text{centers}: \ \{a\cot(\frac{\varphi}{m}),\ 0\}$$

2-5. 吹き出しの強さ $m = Q/2\pi = 60cm^2/s$ の吹き出し点が $x = 2cm,\ y = 0$ 点にあり，それと同じ強度の吹き出し点が $x = -2cm,\ y = 0$ の点にあるとき，次の値を求めよ．(1) 岐点，(2) 流線と等ポテンシャル線を描け．(3) $x = 2cm,\ y = 3cm$ 点の合速度の大きさと方向を求めよ．(4) 無限遠点の圧力を $12kgfcm^2$ とすれば $x = 2cm,\ y = 3cm$ 点の圧力はいくらか．ただし流体の密度を $0.01kgs^2/cm^4$ とする．

（解）

(1) $\dfrac{m}{r_1} + \dfrac{m}{r_2} = 0, \quad \dfrac{m}{x-2} + \dfrac{m}{x+2} = 0, \quad x = 0$

(3) $v_{r1} = \dfrac{m}{\{(x-2)^2 + y^2\}^{1/2}}, \quad v_{r2} = \dfrac{m}{\{(x+2)^2 + y^2\}^{1/2}}$

At point(2, 3),

$v_{r1} = \dfrac{60}{3} = 20cm/s, \quad v_{r2} = \dfrac{60}{5} = 12cm/s$

$V^2 = v_{r1}^2 + v_{r2}^2 - 2v_{r1}v_{r2}\cos\theta$

$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$

$V^2 = 20^2 + 12^2 + 2 \times 20 \times 12 \times \dfrac{3}{5}, \quad V = 28.8cm/s$

$p_\infty = 12kgf/cm^2,\ \rho = 0.01kgs^2/cm^4, \quad p_\infty = p + \dfrac{\rho}{2}V^2$

At point(2, 3), $\quad p = 12 - \dfrac{0.01}{2} \times 28.8^2 = 7.84kgfcm^2$

2-6. (1) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = 4y,\ v = 2x$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $y = 1,\ y = 3,\ x = 2,\ x = 5$ で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ．

（解）

(1) $divV = 0$

(2) $\dfrac{dx}{4y} = \dfrac{dy}{2x}, \quad 2xdx - 4ydy = 0, \quad x^2 - 2y^2 = c$

(3) $4(5-2) + 10(3-1) - 12(5-1) - 4(1-3) = 12m^2/s$

$\Gamma = \displaystyle\int_2^5 \int_1^3 (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy$

$= -\displaystyle\int_1^3 6dy = -(18-6) = -12m^2/s$

2-7. 速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 + y$ で表される流れにおいて $x = \pm 1,\ y = \pm 1$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ．

（解）

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x-1)dxdy = -2\int_{-1}^{1}dy = -4m^2/s
\end{aligned}
$$

2-8. 二次元の渦流れで，その速度成分が $v_r = 0,\ v_\theta = \omega r$ なるときの渦度を求めよ．

（解）

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = f(r)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, \quad \psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 + f(\theta)$$

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 = -\frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2)$$

$$\zeta = -\nabla^2\psi = -(-\omega - \omega) = 2\omega$$