流体力学III試験問題

81-10-6

by E. Yamazato

1. 半径 a の円柱のまわりを平行流が速度 U で左から右へ流れている。(1)x 軸および y 軸上の速度分布を u/U,v/U で示せ。(2) x 軸上で x=-a,x=-2a 点の圧力係数を求めよ。
2. 複素ポテンシャルが $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream function を求めよ
(3)Stagnation point(or points) を求めよ
(4)$r = 1,\ \ \theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
3. 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．
4. 次の関数で示される流れの型を説明し、かつ流線の概略図を描け。
(1)$\psi = 17.3y - 10x$　(2)$w = cz^{2/3}$

（解）

1.

(1)
$$\frac{dw}{dz} = U(1 - \frac{a}{z^2}) = U(1 - \frac{a}{r^2 e^2 i\theta})$$
$$On\ the\ x-axis,\ \theta = 0,\ \pi,\ e^{-2i\pi} = 1$$
$$U(1 - \frac{a^2}{x^2}) = u - iv, \quad v = 0, \quad \frac{u}{U} = (1 - \frac{a^2}{x^2})$$
$$r = y, \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad e^{-2i\theta} = -1$$
$$v = 0, \quad \frac{u}{U} = (1 + \frac{a^2}{y^2}, \quad \frac{v_\theta}{U} = 2\sin\theta$$

(2)
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho U^2} = 1 - (\frac{V}{U})^2$$
$$On\ the\ x-axis:\ V = u = U(1 - \frac{a^2}{x^2})$$
$$C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{x^2})^2\}$$
$$x = -a:\ C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{a^2})^2\} = 1$$
$$x = -2a:\ C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{4a^2})^2\} = \frac{7}{16}$$

2.

(1)
$$Circulation + parallel\ flow$$

(2)
$$w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r)$$
$$\varphi = \theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - \ln r$$

(3)
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = 0$$

$$z = \frac{i}{2} = x + iy \quad x = 0 \quad y = \frac{1}{2}$$

(4) At $r = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$; $\frac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3$, $V = 3$

3.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$\textit{At point A},\ z = 2a,\ z_2 = a + \frac{a^2}{a} = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U \sin\alpha \ (\Gamma:\ \textit{negative})$$

4.

(1) $psi = 17.3y - 10x$, $u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 17.3$, $v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 10$

$\tan\alpha = \frac{v}{u}$, $\alpha = \tan^{-1}\frac{10}{17.3} = 30^o$

(2) $w = cz^{2/3}$, $z = (\frac{w}{c})^{3/2}$, $re^{i\theta} = (\frac{r_1}{c})^{3/2}e^{i3/2\theta}$

$r = (\frac{r_1}{c})^{3/2}$, $\theta = \frac{3}{2}\theta_1$

z-平面の流れは $3/2\pi$ の角を回る流れ