流体力学III試験問題

71-10-13

by E. Yamazato

1. 吹き出し流量がQで、吹き出し点が原点にあり、さらにX軸に平行な速度の流れがこれに加わった場合、この組み合わされた流れの岐点とそこを通る流線は$\psi=\frac{1}{2}Q$で示されることを示せ。また、この流れからできる楕円物体（境界壁）の最大幅を求めよ。
2. 複素ポテンシャルが$w=-ilnz+2z$で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream functionを求めよ
(3)Stagnation point(or points)を求めよ
(4)$r=1,\ \ \theta=\frac{3}{2}\pi$にこける速度を求めよ。
3. 図に示す二次元広がりダクト内を流量$20cm^3/s$の流体が流れている。ただし、$\rho=2kgs^2/cm^4$とする。
(1) もし、Potential flowとすればどういう型の流れか
(2)Potential flowの仮定の下でA点の速度を求めよ。
(3)A点における圧力勾配を求めよ
(4) 一次元流れの仮定でA点の速度を求めよ。
4. 球の中心がある時刻tでy軸の正の方向に$10m/s$の速さで動いており、その加速度は一定で$1m/s^2$である。いま球の半径が$y=-1m$からの距離に逆比例するものとして球の表面の境界条件を求めよ。

（解）

1.

$$\varphi=Ur\cos\theta+m\ln r,\quad \psi=Ur\sin\theta+m\theta$$
$$\text{At stagnation points,}\quad U-\frac{m}{U}=0,\quad r_s=\frac{m}{U}$$
$$\psi=U\frac{m}{U}\sin\pi+m\pi=\frac{Q}{2},\quad \psi=Ur\sin\theta+m\theta=\frac{Q}{2}$$

2.

(1) $Circulation+parallel\ flow$

(2) $w=-i\ln(re^{i\theta})+2re^{i\theta}=-i\ln r+\theta+2r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=(\theta+2r\cos\theta)+i(2r\sin\theta-\ln r)$$
$$\varphi=\theta+2r\cos\theta,\quad \psi=2r\sin\theta-\ln r$$

(3) $\dfrac{dw}{dz}=-\dfrac{i}{z}+2=2-i\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=0$

$$z=\frac{i}{2}=x+iy\quad x=0\quad y=\frac{1}{2}$$

(4) At $r=1,\quad \theta=\dfrac{3\pi}{2};\quad \dfrac{dw}{dz}=2-i\{0-i(-1)\}=3,\quad V=3$

3.

(1) $\varphi=\ln r,\quad v_r=\dfrac{m'}{r},\quad m'=\dfrac{Q'}{2\pi}$

$$Q=\frac{60}{360}Q'=\frac{1}{6}Q',\quad Q'=6Q=6\times 20=120cm^3/s,\quad m'=19cm^3/s$$

$$(2) \qquad v_{rA} = \frac{m'}{r_A} = \frac{Q'}{2\pi r_A} = \frac{120}{(2\pi \times 20)} = 0.55cm/s$$

$$(3) \qquad v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho v_r \left(\frac{dv_r}{dr}\right)_A = \frac{\rho m'^2}{r_A^3}$$

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_A = \frac{(1.204 \times 10^{-6} \times 19.1^2)}{34.6^3} = 0.01 \times 10^{-6}$$

$$(4) \qquad v_{rA} = \frac{Q}{A} = \frac{20}{40} = 0.5cm/s$$

4.

$$F = x^2 + (y - 10t - \frac{t^2}{2})^2 + z^2 - \frac{1}{(1 + 10t + t^2/2)^2)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - 10t - \frac{t^2}{2}), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(t + 10)(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + 2(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3}(t + 10)$$

$$\frac{DF}{Dt} = 2ux + 2v(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + 2wz + 2(t + 10)\{(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$

$$ux + v(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + wz + \{(t + 10)(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$