理想流体力学 試験問題(2)

1993-9-24, 12:45〜14:25

by E. Yamazato

1. (25) 複素ポテンシャル $w = -i\ln z + 2z$ で与えられる流れについて (1) これはどういう型の流れを組み会わせたものか．(2) 速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ．(3) $r = 1$, $\theta = 3\pi/2$ における速度を求めよ．2. (25) (1) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = 4y$, $v = 2x$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $y = 1$, $y = 3$, $x = 2$, $x = 5$ で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ．3. (25) 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

4. (25) 速度 U の一様流れ中に，循環 -Γ の渦と $x = a$ に強さ Q の吹き出しがある場合, $z = 0$ の渦に作用する力を求めよ．

（解）

1.

(1) $Circulation + parallel\ flow$

(2)
$$w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r)$$
$$\varphi = \theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - \ln r$$
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$\text{At } r = 1, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3, \quad V = 3$$

2.

(1) $divV = 0$

(2) $$\frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x}, \quad 2xdx - 4ydy = 0, \quad x^2 - 2y^2 = c$$

(3) $$4(5-2) + 10(3-1) - 12(5-1) - 4(1-3) = 12m^2/s$$
$$\Gamma = \int_2^5 \int_1^3 (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy$$
$$= -\int_1^3 6dy = -(18-6) = -12m^2/s$$

3.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$
$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$
$$At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$
$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$
$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$
$$\Gamma = -4\pi a U \sin\alpha\ (\Gamma:\ negative)$$

4.

$$w = Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + \frac{Q}{2\pi}\ln(z-a)$$
$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = u^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a^2)} + \frac{iU\Gamma}{\pi z} + \frac{UQ}{\pi(z-a)} + \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 az}$$
$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$
$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i(\frac{iU\Gamma}{\pi} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a}) = -i\rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$
$$F_x = 0, \quad F_y = \rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$