

# 完全流体力学 試験問題

by E. Yamazato

9-18-1992, 10:25~12:05

1. (25) 速度成分が  $u = ax + by$ ,  $v = cx + dy$  で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ。また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ。
2. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れ関数を求めよ。
3. (25) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。
4. (20) 二次元の渦流れで、その速度成分が  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \omega r$  なるときの渦度を求めよ。

# 完全流体力学 試験問題

by E. Yamazato

9-18-1992, 10:25~12:05

1. (25) 速度成分が  $u = ax + by$ ,  $v = cx + dy$  で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ。また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ。

(解)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const.$$

$$\text{For irrotational flow, } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad b = c, \quad \psi = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.$$

2. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1) w = aze^{i\alpha} \ (\alpha > 0), \quad (2) w = z^n \ (n = \frac{1}{2}), \quad (3) w = -5i \ln z + 3z, \quad (4) w = 2z + 3 \ln z$$

(解)

(1) Parallel flow with  $\theta = \alpha$

$$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))\}$$

$$\varphi = ar \cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar \sin(\theta + \alpha)$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = u - iv$$

$$u = a \cos \alpha, \quad v = -a \sin \alpha, \quad V = a$$

(2) Corner flow with  $\theta = 2\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$$

$$\text{For } n = \frac{1}{2}, \quad \varphi = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \psi = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

(3) Parallel ( $U=3$ )+circulation( $\Gamma = 10\pi$ ) flow

$$w = -5i \ln(re^{i\theta}) + 3re^{i\theta} = -5 \ln r + 5\theta + 3r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\varphi = 5\theta + 3r \cos \theta, \quad \psi = 3r \sin \theta - 5 \ln r$$

(4) Parallel flow( $U=2$ )+source flow( $Q = 6\pi$ )

$$w = 2re^{i\theta} + 3 \ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 2r \cos \theta + 3 \ln r, \quad \psi = 2r \sin \theta + 3\theta$$

3. (25) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned}
 w &= Uz + m \ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi} \\
 \frac{dw}{dz} &= U + \frac{m}{z} \\
 \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 &= U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z} \\
 F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) \\
 F_x &= -\rho UQ, \quad F_y = 0
 \end{aligned}$$

4. (20) 二次元の渦流れで、その速度成分が  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \omega r$  なるときの渦度を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = f(r) \\
 v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, \quad \psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 + f(\theta) \\
 \psi &= -\frac{1}{2}\omega r^2 = -\frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) \\
 \zeta &= -\nabla^2 \psi = -(-\omega - \omega) = 2\omega
 \end{aligned}$$