完全流体力学演習問題

4-1. y 軸に平行な速度 V の一様流れの複素ポテンシャルを求めよ．

（解）

$$\frac{dw}{dz} = u - iv, \quad u = 0, \quad v = V, \quad w = -iVz$$

4-2. 複素ポテンシャル $w = z^2 + z$ の流れがある．速度ポテンシャル，流れの関数を求めよ．また点 (3, 2) における $x,\ y$ 方向の速度成分および絶対速度をを求めよ．

（解）

$$\begin{aligned}
&w = z^2 + z = (x+iy)^2 + (x+iy) = x^2 + x - y^2 + i(2xy + y) \\
&\varphi = x^2 + x - y^2, \quad \psi = 2xy + y \\
&\frac{dw}{dz} = 2z + 1 = 2x + 1 + 2iy, \quad u = 2x + 1, \quad v = -2y \\
&\text{At point } (3,\ 2), \quad u = 7, \quad v = -4, \quad V = 8.1
\end{aligned}$$

4-3. 複素ポテンシャル $w = (1+i)z$ の流れがある．速度ポテンシャル，流れの関数， $x,\ y$ 方向の速度成分及び絶対速度を求めよ．

（解）

$$\begin{aligned}
&w = (1+i)(x+iy) = x - y + i(x+y) \\
&\varphi = x - y, \quad \psi = x + y, \quad \frac{dw}{dz} = u - iv = 1 + i \\
&u = 1, \quad v = -1, \quad V = 1.41, \quad \alpha = -45^o
\end{aligned}$$

4-4. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れについて説明せよ．

$$(1)\ w = aze^{-i\alpha}(\alpha > 0), \quad (2)\ w = z^n (n = 1/2)$$

（解）

$$\begin{aligned}
&(1)\ \frac{dw}{dz} = ae^{-\alpha} = a(\cos\alpha - i\sin\alpha) = u - v \\
&u = a\cos\alpha, \quad v = a\sin\alpha, \quad V = a \\
&(2)\ z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
&\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin\theta \\
&For\ n = \frac{1}{2}, \quad \varphi = r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}, \quad \psi = r^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

4-5. 渦なし二次元流れで，流れの関数が $\psi = 2xy$ で与えられるとき，速度ポテンシャルおよび複素ポテンシャルを求めよ．

（解）

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=2x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$$
$$\varphi=x^2-y^2+c,\quad w=\varphi+i\psi=(x^2-y^2)+2xyi=az^2$$

4-6. 複素ポテンシャル $w=-i\ln z+2z$ で与えられる流れについて (1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか．(2) 速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ．(3) $r=1,\ \theta=3\pi/2$ における速度を求めよ．

（解）

(1) $Circulation+parallel\ flow$

(2) $w=-i\ln(re^{i\theta})+2re^{i\theta}=-i\ln r+\theta+2r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(\theta+2r\cos\theta)+i(2r\sin\theta-\ln r)$

$\varphi=\theta+2r\cos\theta,\quad \psi=2r\sin\theta-\ln r$

$\dfrac{dw}{dz}=-\dfrac{i}{z}+2=2-i\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

At $r=1,\quad \theta=\dfrac{3\pi}{2};\quad \dfrac{dw}{dz}=2-i\{0-i(-1)\}=3,\quad V=3$

4-7. 図に示すように風が丘から円形（半径 b ）の物体の上を吹いている．速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．また丘の面に添うての流れで円形上での境界条件より a と b との関係を示せ．ただし a は写像円の半径する．

（解）

$$w=\varphi+i\psi,\quad w=U(z_1+\frac{a^2}{z_1}),\quad z_1=z^n,\quad z=re^{i\theta}$$
$$w=U(z^n+\frac{a^2}{z^n}),\quad z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$$w=U\{r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\frac{a^2}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)\}$$
$$\varphi=Ur^n(\cos n\theta+a^2r^{-2n}\cos n\theta)=Ur^n\cos n\theta(1+a^2r^{-2n})$$
$$=Ur^n\cos n\theta+Ua^2\cos n\theta r^{-n}$$
$$\psi=Ur^n(\sin n\theta-a^2r^{-2n}\sin n\theta)=Ur^n\sin n\theta(1-a^2r^{-2n})$$
$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=nUr^{n-1}\cos n\theta(1-a^2r^{-2n})$$
$$v_r)_{A(r=b,\ \theta=\beta=\pi/n)}=nUb^{n-1}(1-a^2b^{-2n})=0,\quad b=a^{1/n}$$

4-8. 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2} \\
&\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0 \\
&\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0 \\
&At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a + \frac{a^2}{a} = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha} \\
&\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0 \\
&U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0 \\
&U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&\Gamma = -4\pi a U \sin\alpha \ (\Gamma:\ negative)
\end{aligned}
$$

4-9. 半径 a の円柱のまわりを平行流れが速度で左か右へ流れている．(1) x 軸 y 軸および円柱表面上の速度分布を U で無次元化して示せ．(2) x 軸上で $x = -a,\ x = -2a$ 点の圧力係数を求めよ．

（解）

$$
\begin{aligned}
&(1)\frac{dw}{dz} = U(1 - \frac{a}{z^2}) = U(1 - \frac{a}{r^2 e^2 i\theta}) \\
&On\ the\ x-axis,\ \theta = 0,\ \pi,\ e^{-2i\pi} = 1 \\
&U(1 - \frac{a^2}{x^2}) = u - iv, \quad v = 0, \quad \frac{u}{U} = (1 - \frac{a^2}{x^2}) \\
&r = y, \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad e^{-2i\theta} = -1 \\
&v = 0, \quad \frac{u}{U} = (1 + \frac{a^2}{y^2}, \quad \frac{v_\theta}{U} = 2\sin\theta \\
&(2)C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho U^2} = 1 - (\frac{V}{U})^2 \\
&On\ the\ x-axis:\ V = u = U(1 - \frac{a^2}{x^2}) \\
&C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{x^2})^2\} \\
&x = -a:\ C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{a^2})^2\} = 1 \\
&x = -2a:\ C_p = \{1 - (1 - \frac{a^2}{4a^2})^2\} = \frac{7}{16}
\end{aligned}
$$

4-10. 速度 U の一様流れ中に，循環 -Γ の渦と $z = a$ に強さ Q の吹き出しがある場合, $z = 0$ の渦に作用する力を求めよ．(中村, 流体力学, p73)

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + \frac{Q}{2\pi}\ln(z-a)\\
&\frac{dw}{dz} = U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)}\\
&(\frac{dw}{dz})^2 = u^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a^2)} + \frac{iU\Gamma}{\pi z} + \frac{UQ}{\pi(z-a)} + \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 az}\\
&\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}\\
&F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i(\frac{iU\Gamma}{\pi} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a}) = -i\rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})\\
&F_x = 0, \quad F_y = \rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})
\end{aligned}
$$

4-11. 二次元ポテンシャル流れにおいて, $z=0$ に Γ_1, $z=a$ に Γ_2 循環がある場合, $z=0$ および $z=a$ の渦に作用する力を求めよ.

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi}\ln x - \frac{i\Gamma_2}{2\pi}\ln(z-a)\\
&\frac{dw}{dz} = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi z} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi(z-a)}\\
&(\frac{dw}{dz})^2 = -\frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2 z^2} - \frac{\Gamma_2^2}{4\pi^2(z-a)^2} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 az}\\
&\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}\\
&At\ z=0, \quad F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}\\
&F_x = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, \quad F_y = 0\\
&At\ z=a, \quad F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i\frac{-\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}\\
&F_x = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, \quad F_y = 0
\end{aligned}
$$

4-12. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの速度ポテンシャルを求めよ. (松尾, 流体力学, p71)

$$
(1)\ w = \frac{1}{2}z^2, \quad (2)\ w = iz^2, \quad (3)\ w = \frac{1}{z}
$$

（解）

$$
\begin{aligned}
&(1)\ w = \frac{1}{2}(x+iy)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy)\\
&\varphi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \psi = xy\\
&(2)\ w = i(x+iy)^2 = i(x^2 - y^2 + 2ixy)\\
&\varphi = 2ixy, \quad \psi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)
\end{aligned}
$$

(3) $w = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\varphi = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad \psi = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

4-13. 壁から a の距離に吹き出しがあるとき，その壁に作用する全圧力を求めよ．ただし壁の裏側の圧力は p_o とする． (Schaum's, p127)

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = m\{\ln(z+a)+\ln(z-a)\}, \quad \overline{w} = m\{\ln(\overline{z}+a)+\ln(\overline{z}-a)\}\\
&V^2 = \frac{dw}{dz}\frac{d\overline{w}}{dz} = m^2(\frac{1}{z+a}+\frac{1}{z-a})(\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{z}-a})\\
&z = x+iy, \quad \overline{z} = x-iy\\
&V^2 = \frac{4m^2(x^2+y^2)}{\{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4\}}, \quad \frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}V^2 = \frac{p_o}{\rho}\\
&F = \int_{-\infty}^{\infty}(p-p_o)_{x=0}dy = -\frac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{\infty}(V)_{x=0}dy\\
&= -2\rho m^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{(y^2+a^2)^2}dy = \frac{-y}{2(a^2+y^2)}+\frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{y}{a}\\
&= -2\rho m^2(\frac{\pi}{2a}) = -\frac{\rho Q^2}{4\pi a}\ (m = \frac{Q}{2\pi})
\end{aligned}
$$

4-14. x 軸にある傾きをもつ一様平行流れ中に置かれた任意断面の柱状体に循環があるとき，柱状体に作用する力を求めよ． (HR Vallentine, p260)

（解）

$$
\begin{aligned}
&\frac{dw}{dz} = Ue^{i\alpha}+\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\cdots\\
&w = Ue^{i\alpha}z+a\ln x-\frac{b}{z}+\cdots\\
&A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\\
&(\frac{dw}{dz})^2 = U^2e2i\alpha-\frac{i\Gamma Ue^{i\alpha}}{\pi z}\cdots = A_o+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\cdots\\
&A_1 = -\frac{i\Gamma Ue^{i\alpha}}{\pi}\\
&F_x-F_y = -\pi\rho A_1 = \pi\rho\frac{i\Gamma Ue^{i\alpha}}{\pi} = -i\Gamma\rho Ue^{i\alpha}\\
&F_x = 0, \quad F_y = -\rho U\Gamma\ (\alpha = 0)
\end{aligned}
$$

4-15. x 軸に平行な一様流 U の中に置かれた半径 a の円柱のまわりに循環 Γ があるとき，円柱に作用する力を求めよ．(古屋, 流体力学,k p79)

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = U(z+\frac{a^2}{z})-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z\\
&\frac{dw}{dz} = U(1-\frac{a^2}{z^2})-\frac{i\Gamma}{2\pi z}
\end{aligned}
$$

$$
(\frac{dw}{dz})^2 = U^2(1-\frac{a^2}{z^2})^2 + \frac{i^2\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} - 2U(1-\frac{a^2}{z^2})\frac{i\Gamma}{2\pi z}
$$
$$
= U^2 - \frac{iU\Gamma}{\pi z} - (2U^2a^2 - \frac{\Gamma}{4\pi^2 z^2} + \frac{iUa^2\Gamma}{\pi z^2} + \frac{U^2a^4}{z^4}
$$
$$
F_x - F_y = \rho\pi\frac{iU\Gamma}{\pi} = i\rho U\Gamma
$$
$$
F_x = 0, \quad F_y = -i\rho U\Gamma
$$
$$
M + iN = i\pi\rho(2U^2a^2 - \frac{\Gamma}{4\pi^2})
$$

4-16. 図に示すような流線図より，この流れがどういう型の流れを組み合わせたものか説明せよ．また数値も含めた複素ポテンシャルを求めよ． (Purdue)

（解）

$$
Parallel\ flow + source + sink\ flow
$$
$$
w = iUz + m\ln\frac{z-a_2}{z-a_1}
$$
$$
a_1 = 0, \quad a_2 = 3+4i, \quad U = 4m/s, \quad m = \frac{Q}{2\pi} = \frac{27\times 4}{2\pi} = \frac{54}{\pi}
$$
$$
w = i4z + \frac{54}{\pi}\ln(1-\frac{3+4i}{z})
$$

4-17. 複素ポテンシャルが $w = 3z^{2/3}$ で表される流れにおいて x 軸に添っての速度分布を示せ．ただし $x = 1$ における速度を基準速度にとる．

（解）

$$
\frac{dw}{dz} = 2z^{-1/3} = 2(x+iy)^{-1/3}
$$
$$
On\ the\ x-axis:\ \frac{dw}{dz} = 2x^{-1/3}
$$
$$
u_1 = 2\ at\ x = 1, \quad u = u_1x^{-1/3}
$$

4-18. 軸に平行な一様流中に吹き出しが $(-a,\ 0)$ に，同じ強さの吸い込みが $(a,\ 0)$ にあるとき，次の値を求めよ． (1) 複素ポテンシャル, (2) 速度ポテンシャルおよび流れの関数, (3) 任意の点における速度, (4) 岐点.

（解）

$$
(1)\ w = Uz + m\ln\frac{z+a}{z-a} = Ur(\cos\theta + i\sin\theta) + m\ln\frac{r_1}{r_2} - im(\theta_2-\theta_1)
$$
$$
(2)\ \varphi = Ur\cos\theta + m\ln\frac{r_1}{r_2}
$$
$$
\psi = Ur\sin\theta - m(\theta_2-\theta_1)
$$
$$
(3)\ \frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z+a} - \frac{m}{z-a}, \quad z+a = r_1e_1^{i\theta}, \quad z-a = r_2^{i\theta}
$$
$$
\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{r_1}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) - \frac{m}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)
$$
$$
u = U + \frac{m}{r_1}\cos\theta_1 - \frac{m}{r_2}\cos\theta_2, \quad v = -\frac{m}{r_1}\sin\theta_1 + \frac{m}{r_2}\sin\theta_2
$$

$$(3)\ V = U - \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} = 0$$
$$Stagnation\ point\ is\ on\ the\ x-axis,$$
$$U - m(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s+a}) = 0$$
$$r_s = a\sqrt{\frac{2m}{aU}+1}$$

4-19. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{1}{2}),\ (3)\ w = -5i\ln z + 3z,\ (4)\ w = 2z + 3\ln z$$

（解）

$$(1)\ Parallel\ flow\ with\ \theta = \alpha$$
$$w = ar\{(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\}$$
$$\varphi = ar\cos(\theta+\alpha), \quad \psi = ar\sin(\theta+\alpha)$$
$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u - iv$$
$$u = a\cos\alpha, \quad v = -a\sin\alpha, \quad V = a$$
$$(2)\ Corner\ flow\ with\ \theta = 2\pi$$
$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$\varphi = r^n\cos n\theta, \quad \psi = r^n\sin n\theta$$
$$For\ n = \frac{1}{2}, \quad \varphi = r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}, \quad \psi = r^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$(3)\ Parallel\ (U=3) + circulation\ (\Gamma = 10\pi)\ flow$$
$$w = -5i\ln(re^{i\theta}) + 3re^{i\theta} = -5\ln r + 5\theta + 3r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\varphi = 5\theta + 3r\cos\theta, \quad \psi = 3r\sin\theta - 5\ln r$$
$$(4) w = 2re^{i\theta} + 3\ln(re^{i\theta})$$
$$\varphi = 2r\cos\theta + 3\ln r, \quad \psi = 2r\sin\theta + 3\theta$$