完全流体力学演習問題

1-1. 半径の球が最初静止流体中より速度成分 $U,\ V,\ W$ の定常状態で動いている．いまその球が原点にあるときの時間を t としてその表面の方程式が次式で表されるときの境界条件の方程式を求めよ．

$$F = (x-Ut)^2 + (y-Vt)^2 + (z-W)^2 - r^2 = 0$$

（解）

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2U(x-Ut) - 2V(y-Vt) - 2W(z-Wt)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-Ut), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-Vt), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z-Wt)$$

$$-2U(x-Ut) - 2V(y-Vt) - 2W(z-Wt) + 2u(x-Ut) + 2v(y-Vt) + 2w(z-Wt) = 0$$

$$(u-U)(x-Ut) + (v-V)(y-Vt) + (w-W)(z-Wt) = 0$$

1-2. 球の中心がある時刻 t で y 軸の正の方向に $10m/s$ の速さで動いておりその加速度は一定で $1m/s^2$ である．いま球の半径が $y=-1m$ からの距離に逆比例するものとして球の表面の境界条件を求めよ．ただし $t=0$ で球の中心は原点にあり，その半径は 1 とする．

（解）

$$F = x^2 + (y - 10t - \frac{t^2}{2})^2 + z^2 - \frac{1}{(1+10t+t^2/2)^2)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-10t-\frac{t^2}{2}), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(t+10)(y-10t-\frac{t^2}{2}) + 2(1+10t+\frac{t^2}{2})^{-3}(t+10)$$

$$\frac{DF}{Dt} = 2ux + 2v(y-10t-\frac{t^2}{2}) + 2wz + 2(t+10)\{(1+10t+\frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$

$$ux + v(y-10t-\frac{t^2}{2}) + wz + \{(t+10)(1+10t+\frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$

1-3. 流体の速度成分が $u=yz+t,\ v=xz-t,\ w=xy$ で与えられるとき点 (1,1,1) における流体の加速度の成分を t で表せ．

（解）

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= 1 + vz + wy = 1 + (xz-t)z + xy^2,\ at\ (1,1,1),\ \frac{dw}{dt} = 3-t$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$=-1+uz+wx=-1+(yz+t)z+x^2,\ at\ (1,1,1),\ \frac{dw}{dt}=t+1$$

$$\frac{dw}{dt}=uy+vx=(yz+t)y+(xz-t)x,\ at\ (1,1,1),\ \frac{dw}{dt}=2$$

1-4. 二次元非圧縮性流体の連続の式を極座標で表せ．もし特別な流れとして $v_r=-\mu\cos\theta/r^2$ で示される流れの v_θ および合速度を求めよ．

（解）

$$r:\ \rho v_r rd\theta-\{\rho v_r rd\theta+\frac{\partial(\rho v_r rd\theta)}{\partial r}dr\}=-\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r}drd\theta$$

$$\theta:\ \rho v_\theta d\theta-\{\rho v_\theta dr+\frac{\partial(\rho v_\theta dr)}{\partial r\theta}rd\theta\}=-\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}drd\theta$$

$$t:\ \{\rho drrd\theta+\frac{\partial(\rho drrd\theta)}{\partial t}\}-\rho drrd\theta=\frac{\partial\rho}{\partial t}drrd\theta$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}drrd\theta-\{\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}\}drd\theta=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{r}\{\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}\}=0$$

$$\text{Hence, }\ \rho=const.,\ \frac{\partial(v_r r)}{\partial r}+\frac{(\partial v_\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$If\ v_r=-\frac{\mu\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=-\frac{\partial(v_r r)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(-\frac{\mu\cos\theta}{r})=-\frac{\mu\cos\theta}{r^2}$$

$$v_\theta=\int\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}d\theta=\int-\frac{\mu\cos\theta}{r^2}d\theta=-\frac{\mu\sin\theta}{r^2}$$

$$v_\theta=-\frac{\mu\sin\theta}{r^2},\quad V=\frac{\mu}{r^2}$$

1-5. 次の流れを説明し，これらはすべて理論上存在しうる流れであり，かつ (4) 以外の流れはすべて渦なし流れであることを示せ．

(1) $\psi=15y$,　(2) $\psi=17.3y-10x$,　(3) $\psi=-20x$,　(4) $\psi=-5x^2$

（解）

$$(1)\ u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=15,\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$(2)\ u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=17.3,\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=10,\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$(3)\ u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=20,\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$(4)\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 10x, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 10(rotational)$$

1-6. 非圧縮流れの速度成分が次のようにあらわされるとする．この流れは理論上存在しうることを示せ．

$$(1)\ u = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \quad v = \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}, \quad w = \frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$(2)\ u = \frac{(3x^2-r^2)}{r^5}, \quad v = \frac{3xy}{r^5}, \quad w = \frac{3zx}{r^5}$$

（解）

$$(1)\ divV = \frac{2yz(x^2+y^2) - 8x^2yz}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2yz(x^2+y^2) + 4yz(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} + 0 = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial u}{\partial x} = -5r^{-7}x(3x^2-r^2) + (6x-2x)r^{-5} = -5r^{-7}x(3x^2-r^2) + 4xr^{-5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -5r^{-7}y(3xy) + 3xr^{-5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -5r^{-7}z(3xz) + 3xr^{-5}$$

$$divV = -r^{-7}x\{5(3x^2-r^2) - 4r^2 + 15y^2 - 3r^2 + 15^2 - 3r^2\}$$

$$= -r^7x(15r^2 - 5r^2 - 10r^2) = 0$$

1-7. 非圧縮性流体の速度成分が $u = ax,\ v = ay,\ w = -2az$ で与えられるとすればこの流れの流線は $y^2z = const,\ x/y = const.$ の曲面の交わりの曲線で表されることを証明せよ．

（解）

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$\int \frac{1}{ax}dx = \int \frac{1}{ay}dy$$

$$\ln x - \ln y = c, \quad \frac{x}{y} = const.$$

$$\int \frac{1}{ay}dy = \int \frac{1}{2az}dz$$

$$2\ln y + \ln z = c, \quad y^2z = c = const.$$

$$\int \frac{1}{ax}dx = \int \frac{1}{2az}dz$$

$$2\ln x + \ln z = c, \quad x^2z = c = const.$$

1-8. 次の関数で速度ポテンシャルの存在するものを示せ．

$$(1)\ F = x + y + z, \quad (2)\ F = x + xy + xyz, \quad (3)\ F = \ln x, \quad (4)\ F = \sin(x+y+z)$$

（解）

$$(1)\ \nabla^2 F = 0, \quad (2)\ \nabla^2 F = 0, \quad (3)\ \nabla^2 = -\frac{1}{x^2}, \quad (4)\ \nabla^2 F = -3\sin(x+y+z)$$

1-9. 二次元の軸に平行な流れで速度が $y=0$ で 0, $y=4$ で $20m/s$ で直線的に変化しているとき，その流れの関数を求めよ．また流れは渦なし流れか.

（解）

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 5y, \quad \psi = \frac{5}{2}y^2$$

1-10. 速度成分が $u = ax + by,\ v = cx + dy$ で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ．また，流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ.

（解）

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const.$$

$$For\ irrotational\ flow,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},\ b = c,\ \psi = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.$$

1-11. 速度成分が $u = x^2 - y^2,\ v = -2xy$ で示された流れは理論上存在するか．また流れは渦なし流れであることを示し，その速度ポテンシャルを求めよ.

（解）

$$divV = 0, \quad \zeta = 0$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 - y^2, \quad \varphi = \frac{x^3}{3} - xy^2 + f(y)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2xy, \quad \varphi = -xy^2 + f(x)$$

$$\varphi = \frac{x^3}{3} - xy^2 + c$$

1-12. 二次元定常流れにおける軸方向の速度成分 $u,\ v$ が次のように与えられるとき，点 (3,1) を通る流線の方程式を求めよ.

$$u = 4x^2y, \quad v = -4y^2x$$

（解）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{4y^2x}{4x^2y}, \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$xy = c,\ \text{at point}(3,1),\ c = 3,\ xy = 3$$

1-13. 一次元定常流れの速度 v が次のように与えられるときの加速度を求めよ．

$$v = \frac{2s}{1+t}$$

（解）

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{2s}{(1+t)^2} + \frac{2s}{(1+t)}\{\frac{2}{(1+t)}\} = \frac{2s}{(1+t)^2}$$

1-14. 二次元定常流れにおける x, y 軸方向の速度成分 u, v が次のように与えられるとき，点 (3,1) における流体の加速度の大きさとその方向を求めよ．

$$u = 4x^2y, \quad v = 4y^2x$$

（解）

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2y(8xy) - 4y^2(4x^2) = 16x^3y^2$$

$$a_y = 4x^2y(-4y^2) - 4y^2x(-8yx) = 16x^2y^3$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 16x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$At\ point(3,1),\ a = 455.4,\ \theta = 18.4^o$$

1-16. 二次元流れで A (0.2) 点で $\psi = 4m^2/s$, B $(0,1)$ 点で $\psi = 2m^2/s$ なるとき AB 間の流量を求めよ．

（解）

$$Q_{BA} = \psi_A - \psi_B = 4 - 2 = 2m^2/s$$

1-17. 二次元の渦流れで，その速度成分が $v_r = 0$, $v_\theta = \omega$ なるときの渦度を求めよ．

（解）

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = f(r)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, \quad \psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 + f(\theta)$$

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega r^2 = -\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)$$

$$\zeta = -\nabla^2\psi = -(-\omega - \omega) = 2\omega$$

1-18. 連続の式を満足するための次の速度成分を求めよ．

(1) $u = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = -xy - yz - xz, \quad w =$

(2) $u = \ln(y^2 + z^2), \quad v = \sin(x^2 + y^2), \quad w =$

（解）

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -x - z, \quad divV = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -x + z, \quad w = -xz + \frac{1}{2}z^2 + f(x, y)$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad divV = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad w = f(x, y)$$