完全流体力学演習問題

0-1. もし $\phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$ で表されるとき，点 (1,-2,-1) における $\nabla\phi$ を求めよ．
（解）

$$\nabla\phi=(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k)(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=6xyi+(3x^2-3y^2z^2)j-2y^3zk$$

$$\text{At point}(1,-2,-1),\ \nabla\phi=-12i-9j-16k$$

0-2. $\phi=\ln|\overline{r}|$ で表されるとき $\nabla\phi$ を求めよ．ここで $\overline{r}=xi+yj+zk$ である．
（解）

$$|\overline{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \phi=\ln|\overline{r}|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y2+z^2)$$

$$\nabla\phi=\frac{1}{2}\{i\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+j\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+k\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\}$$

$$=\frac{xi+yj+zk}{x^2+y^2+z^2}=\frac{|\overline{r}|}{r^2}$$

0-3. $\phi=2x^3y^2z^4$ で表されるとき，次の値を求めよ．(1) $\nabla\nabla\phi$ ($div\ grad\phi$), (2)$\nabla\nabla\phi=\nabla^2\phi$ なることを示せ．

$$\text{where }\nabla^2\phi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

（解）

$$(1)\ \nabla\phi=6x^2y^2z^4i+4x^3yz^4j+8x^3y^2z^3k$$

$$\nabla\nabla\phi=12xy^2z^4+24x^3y^2z^2$$

$$(2)\ \nabla\nabla\phi=(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k)(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z}=\nabla^2\phi$$

0-4. $\overline{A}=x^2yi-2xzj+2yzk$ なるとき $curl\ curl\overline{A}$ を求めよ．
（解）

$$curl\ curl\overline{A}=\nabla\times(\nabla\times\overline{A})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\{(2x+2z)i-(x^2+2z)k\}$$

0-5. $\phi=1/|\overline{r}|$ として $\nabla\phi$ を求めよ．ここで $\overline{r}=xi+yj+zk$ である．

（解）

$$|\overline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$grad\phi = \nabla\phi = -i\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - i\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - i\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -i\frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\overline{r}}{r^3}$$

0-6. $\nabla^2(1/|\overline{r}|) = 0$ なることを証明せよ．ここで $\overline{r} = xi+yj+zk$ である．

（解）

$$\nabla^2 = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= -3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

0-7. もし $\overline{A} = xzi - yzj + xyz$ で表されるとき点 (1,-1,1) における $\nabla\overline{A}(div\overline{A})$ を求めよ．

（解）

$$\nabla\overline{A} = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)(xzi - yzj + xyzk)$$

$$= z - z + xy = xy, \quad \nabla\overline{A}(1,-1,1) = -1$$

0-8. 次の式を証明せよ．

$$(1)\ \nabla\times(\nabla\phi) = 0(curl\ grad\phi = 0),\ (2)\ \nabla(\nabla\times\overline{A}) = 0\ (div\ curl\overline{A} = 0)$$